

Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt  
Institut für Sportwissenschaften

Seminar:

Motorisches Lernen unter systemdynamischen Aspekten

W. Schöllhorn

WS '95/'96

Thema:

Synergetik & Nichtlineare Dynamik

von:

Jens C. Mugrauer

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1.</b>	<b>Einleitung.....</b>	<b>4</b>
<b>2.</b>	<b>Das Bénard-Experiment als Beispiel für Strukturbildung.....</b>	<b>5</b>
2.1	<u>Aufbau des Systems.....</u>	5
2.2	<u>Störung des Systems durch den Kontrollparameter.....</u>	5
2.3	<u>Verhalten des Systems vor der Instabilität.....</u>	6
2.4	<u>Verhalten des Systems nach der Instabilität.....</u>	6
2.5	<u>Erklärung der Strukturbildung.....</u>	6
2.5.1	Beschreibung des Systems.....	6
2.5.2	Der Ordnungsparameter.....	7
2.5.3	Das Versklavungsprinzip.....	9
2.5.4	Das Wabenmuster.....	9
<b>3.</b>	<b>Entstehen von Chaos.....</b>	<b>11</b>
3.1	<u>Kausalitätsprinzipien.....</u>	11
3.2	<u>Logistische Gleichung: Selbstorganisation &amp; Chaos.....</u>	12
3.3	<u>Selbstorganisation &amp; Chaos beim Bénard-Experiment.....</u>	14
<b>4.</b>	<b>Bezug zum Sport.....</b>	<b>17</b>

Literaturverzeichnis



Abb.1: Wolkenstraßen als Folge hochgeordneter Luftbewegungen.

## 1. Einleitung

---

Überall im irdischen Dasein trifft man auf Strukturen. In der unbelebten Natur weisen zum Beispiel sogenannte Wolkenstraßen (Abb.1) hochgeordnete Strukturen auf. Aber auch in der belebten Natur kann man beispielsweise im Aufbau eines Blattes mit seinen feinen Verästelungen eine hochgradige Ordnung feststellen. Schließlich sei noch der Städtebau als Repräsentant künstlicher Strukturen genannt.

Die Frage nach dem Entstehen solcher geordneter Zustände führt uns zur Synergetik, der Lehre vom "Zusammenwirken". Diese beschäftigt sich mit dem Zusammenwirken vieler Teile, den Untereinheiten, eines System, insbesondere mit der daraus resultierenden Strukturbildung. Untereinheiten können sein: Atome, Moleküle, Zellen, Neuronen, Organe, Tier- und Menschengruppen etc.

Das Verhalten solcher Systeme unterliegt bestimmten Gesetzmäßigkeiten, die durch folgende Konzepte erfasst werden können:

- Kontrollparameter,
- Instabilität,
- Ordnungsparameter,
- Versklavungsprinzip,
- Nichtlineare Dynamik.

Um diese Konzepte zu verstehen, betrachten wir ein Experiment, das um 1900 von Bénard durchgeführt wurde.

## 2. Das Bénard-Experiment als Beispiel für Strukturbildung

---

### 2.1 Aufbau des Systems

Es handelt sich bei diesem Experiment um eine von unten erhitzte Flüssigkeit. Im Modell stellt man sich eine Flüssigkeitsschicht der Dicke  $d$  vor, die gleichmäßig über die gesamte untere Fläche eine Wärmezufuhr erfährt (Abb.2).

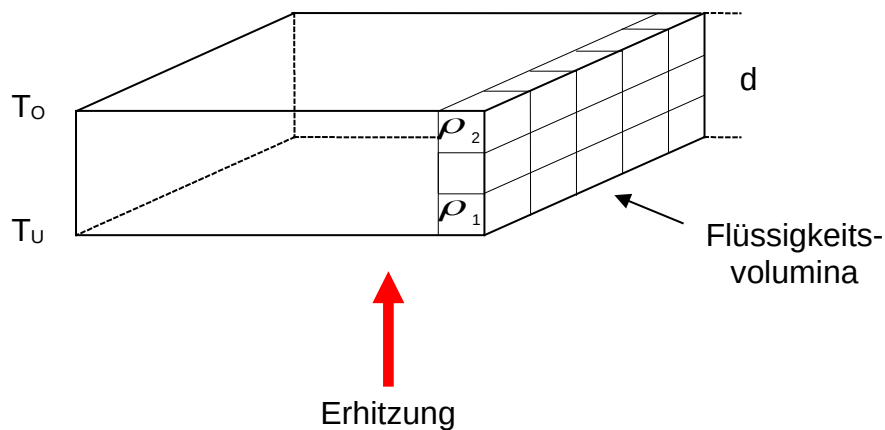


Abb.2: Das Bénard-Experiment im Modell.

### 2.2 Störung des Systems durch den Kontrollparameter

In der unteren Flüssigkeitsschicht bildet sich eine höhere Temperatur aus als in der oberen, so daß zwischen diesen Schichten eine Temperaturdifferenz

$$\Delta T = T_u - T_o$$

besteht, die durch die Wärmezufuhr von außen kontrolliert werden kann.  $\Delta T$  nennt man daher Kontrollparameter des Systems. Er ist ein Maß dafür, wie weit man das System aus dem Gleichgewichtszustand bringt. Im vorliegenden Fall stellt sich die Störung des Systems folgendermaßen dar: Da eine Erhitzung in der Regel eine Abnahme der Dichte mit sich bringt, ist also auf Grund der Temperaturdifferenz  $\Delta T$  die Dichte am Boden der Flüssigkeit geringer als in der oberen Schicht. Betrachtet man nun die Untereinheiten des Systems, die man sich hier als Flüssigkeitsvolumina vorstellen kann, so treffen wir auf die Situation, daß die leichteren Teile unten liegen, während sich die schwereren oben befinden. Die ursprünglich homogene Flüssigkeit hat eine Störung erfahren.

### 2.3 Verhalten des Systems vor der Instabilität

In der unter 2.2 beschriebenen Situation wirken folgende Kräfte effektiv:

- Auftrieb auf leichtere Teile,
- Schwerkraft auf schwerere Teile.

Es müsste also ein Austausch der Flüssigkeitsvolumina stattfinden, d.h. die Flüssigkeit müsste sich in Bewegung setzen. Dies tut sie jedoch zunächst nicht, da den einwirkenden Kräften die innere Reibung (Viskosität) entgegensteht. Bei entsprechend kleinem  $\Delta T$  bleibt die Flüssigkeit in Ruhe. Der Temperaturtransport erfolgt hier auf molekularer Ebene. Das System kehrt in seinen homogenen Referenzzustand zurück, dieser Zustand hat demnach eine Stabilität.

### 2.4 Verhalten des Systems nach der Instabilität

Erhöht man  $\Delta T$  über einen kritischen Wert, bei dem die beschriebenen Kräfte die Viskosität übersteigen, so gerät die Flüssigkeit in Bewegung. Der homogene Zustand ist beim kritischen  $\Delta T$ -Wert instabil geworden. Verblüffenderweise beobachtet man nun, daß das System in einen anderen geordneten Zustand übergeht, der wiederum stabil ist: Es ergibt sich ein geordnetes Strömungsmuster in Form von Flüssigkeitsrollen (Abb.3). Man spricht von einer Rollenbewegung.

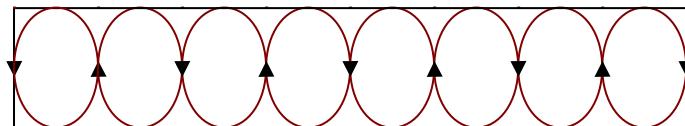


Abb.3: Rollenbewegung als hochgeordnetes Strömungsmuster.

### 2.5 Erklärung der Strukturbildung

#### 2.5.1 Beschreibung des Systems

Zum Zwecke der mathematischen Beschreibung betrachten wir den Verlauf der vertikalen Geschwindigkeit der Flüssigkeit über deren Breite. Die x-Achse wird mit der Breite, die y-Achse mit der Geschwindigkeit identifiziert (Abb.4).

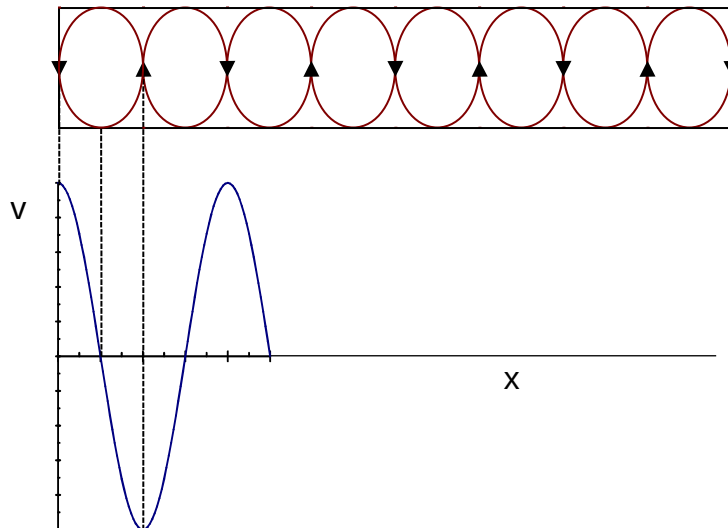


Abb.4: Übertragung der Rollenbewegung in ein Koordinatensystem.

Demnach kann man das System mit einer Sinus-Funktion

$$v_z(x) = A_1 \sin k_1 (x + \varphi)$$

beschreiben.  $A_1$  ist die der Schwingung zugehörige Amplitude,  $k_1 = 2\pi/\lambda_1$  ihre Wellenzahl ( $\lambda_1 =$  Wellenlänge),  $\varphi = \pi/2$  ihre Phase. Derartige Funktionen sind theoretisch unendlich viele denkbar:

$$v_z(x) = A_n \sin k_n (x + \varphi).$$

Die Suche nach einer Erklärung für die Strukturbildung führt uns also zu den Fragen, warum und wie geht das System ausgerechnet in diesen Zustand über.

### 2.5.2 Der Ordnungsparameter

Solange das System das Muster noch nicht gebildet hat, kann man es natürlich auch nicht mit der oben genannten Sinus-Funktion beschreiben. Wir können jedoch die kleinen Flüssigkeitsbewegungen (Fluktuationen), die sich zunächst ergeben als Amplitudenansätze jeweils möglicher Schwingungen ansehen.

In diesem Modell "testet" die Flüssigkeit durch Fluktuationen verschiedene Bewegungszustände aus. Die meisten Amplituden klingen wieder ab, wohingegen sich eine bestimmte durchzusetzen vermag. Man nennt diese spezielle Amplitude  $A_1$  den Ordnungsparameter des Systems.

Zum besseren Verständnis schauen wir uns die zeitliche Entwicklung des Ordnungsparameters  $A_1$  an. Dieser Ablauf läßt sich mit der Gleichung des aus der Physik bekannten "anharmonischen Oszillator" beschreiben:

$$d/dt A_1 = \alpha A_1 - \beta A_1^3. \quad *$$

$\alpha A_1$  stellt die Zuwachsrate mit dem Wachstumsparameter  $\alpha$  dar.  
 $\beta A_1^3$  ist eine Verlustrate mit dem Verlustparameter  $\beta$ .  $\alpha$  und  $\beta$  sind vom System vorgegebene Größen.

Zunächst ist  $A_1$  in Form einer Fluktuation nur ansatzweise als Amplitude vorhanden. Für dieses kleine  $A_1$  kann man das kubische Glied in der Gleichung vernachlässigen, so daß die Änderung von  $A_1$  positiv ist.  $A_1$  wächst demnach weiter an. Dadurch steigt natürlich der Einfluß der Verlustrate  $\beta A_1^3$  und zwar bis zur Kompensation der Zuwachsrate. Da die Änderung von  $A_1$  nun Null ist, nimmt  $A_1$  also einen konstanten Wert an (Abb.5).

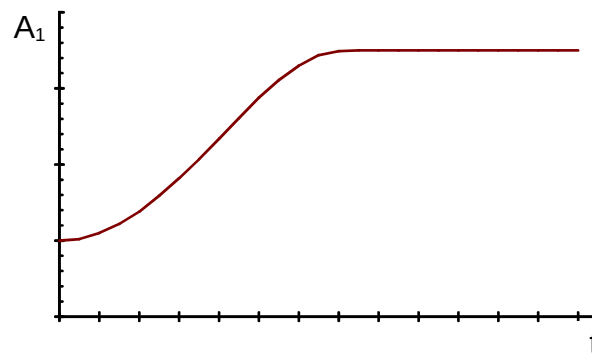


Abb.5: Zeitlicher Verlauf der Amplitude  $A_1$ .

Mit  $d/dt A_1 = 0$  ergibt sich für die Gleichung \*

$$0 = \alpha A_1 - \beta A_1^3.$$

Als Lösungen dieses Ausdruckes findet man nach einfachen Umformungen:

$$A_1 = 0$$

$$A_1 = \sqrt[3]{\alpha / \beta}.$$

Ersterer ist der uninteressante Fall, daß  $A_1$  noch nicht entstanden ist.  $\sqrt[3]{\alpha / \beta}$  stellt die vom System vorgegebenen Bedingungen dar (z.B.  $\alpha \sim \Delta T \sim d$ ). Die Amplitude  $A_1$  erfüllt diese Bedingungen und wird dadurch in ihrer Entwicklung begünstigt.

Genau betrachtet gibt es zwei Lösungen, die gleichberechtigt sind, wie wir später noch sehen werden.



### 2.5.3 Das Versklavungsprinzip

Die so entstandene Amplitude zwingt nun anderen Flüssigkeitselementen diesen Bewegungszustand auf, sie werden "versklavt". Macht man den Prozess durch das Einbringen von Tinte sichtbar, so kann man deutlich erkennen, wie mit der Zeit immer mehr Flüssigkeitselemente an der Bewegung teilnehmen. Betrachtet man diese Versklavung als einen Zuwachs des Ordnungsparameters, wodurch wiederum *vermehrt* Flüssigkeitsanteile versklavt werden, dann muß schließlich die gesamte Flüssigkeit dem Ordnungsparameter  $A_1$  folgen und geht damit in einen stabilen Zustand über. Von außen beobachten wir somit das bereits erwähnte Rollenmuster.

### 2.5.4 Das Wabenmuster

In der Praxis treten in der Regel keine isolierten Rollenmuster auf, sondern es entstehen Wabenmuster, die man sich als Überlagerung dreier, jeweils um  $60^\circ$  versetzter Rollenbewegungen vorstellen kann (Abb.6).

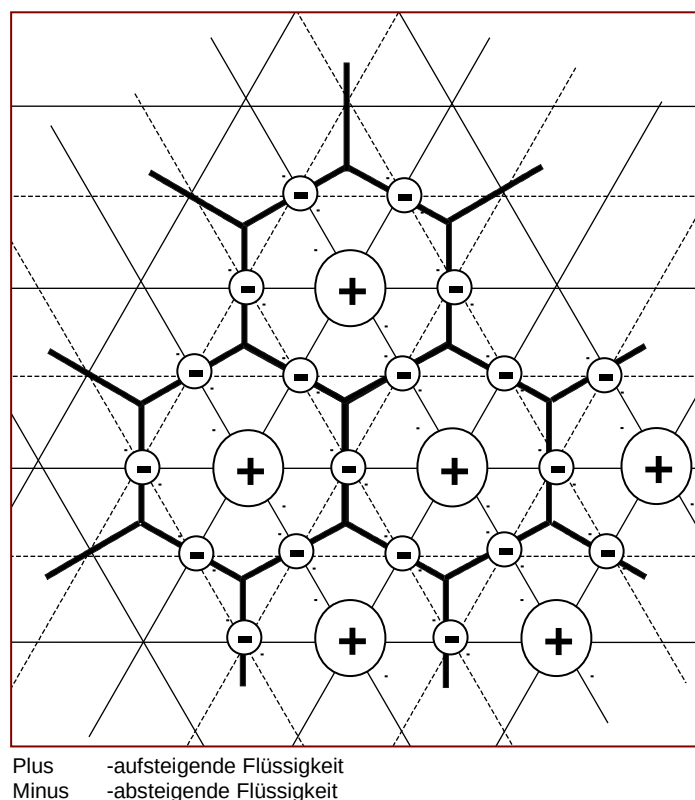


Abb.6: Schematische Darstellung des Wabenmusters.

Das auf Seite 10 gezeigte Wabenmuster (Abb.7) ist selbst gegen massive Störungen wie Umrühren stabil. Interessanterweise ist der gefundene Zustand derjenige, der die Wärme am besten nach oben transportiert.

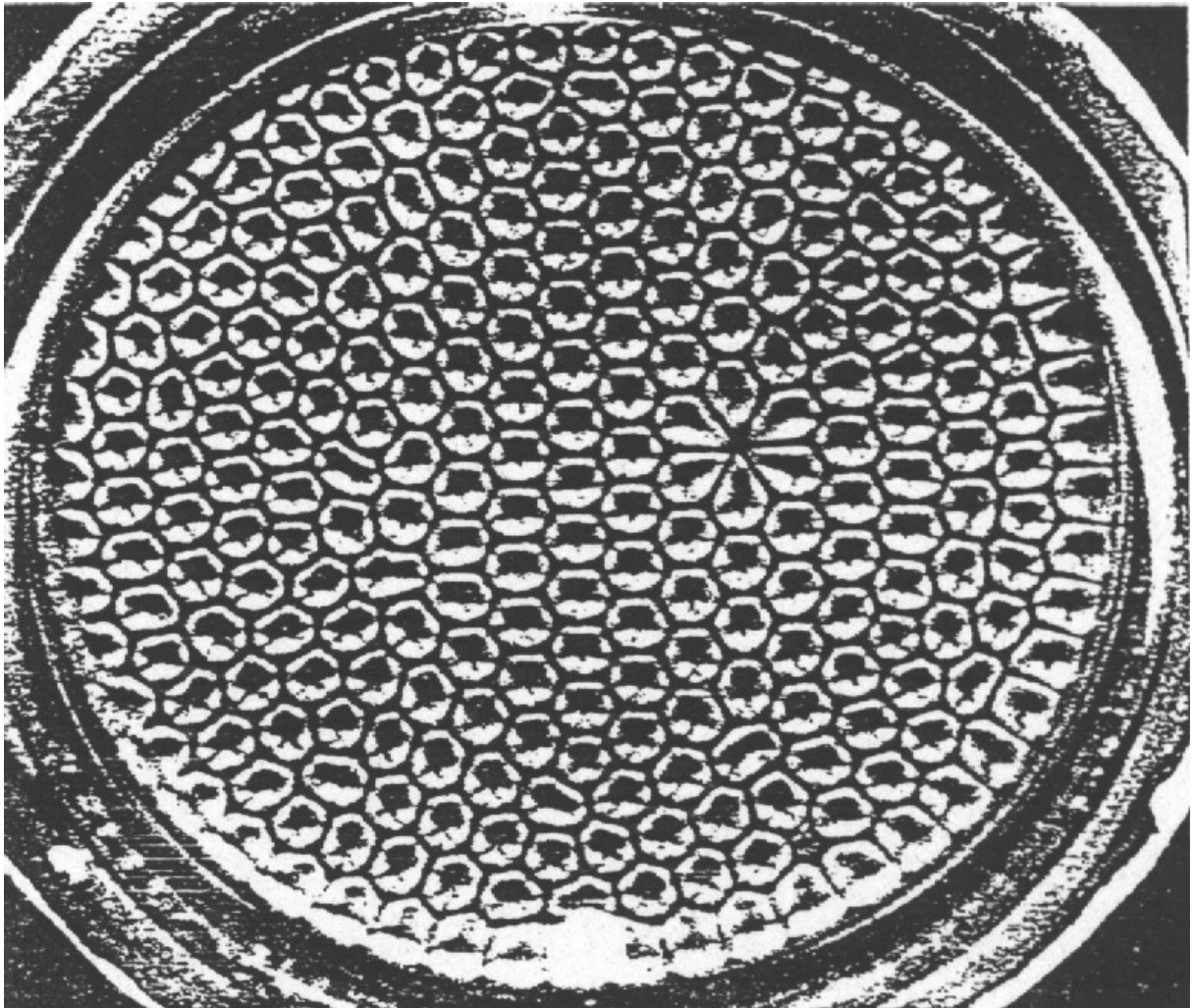


Abb.7: Das Wabenmuster im Experiment.

### 3. Entstehen von Chaos

---

#### 3.1 Kausalitätsprinzipien

Wir haben gesehen, wie durch Fluktuationen ein Muster entstehen kann. Verallgemeinert bedeutet dies, daß eine kleine, mikroskopische Ursache eine makroskopische Wirkung erzielt. Mit Phänomenen, die diesem Kausalitätsprinzip folgen, befasst sich die Nichtlineare Dynamik, deren Bedeutung klar wird, wenn wir uns die bisher in der Physik üblichen Kausalitätsprinzipien anschauen. Die klassische Anschauung ist das als schwache Kausalität bekannte Prinzip. Es besagt, daß gleiche Ursachen gleiche Wirkungen hervorrufen. Die Erfahrung hat jedoch die Unmöglichkeit aufgezeigt, gleiche Ursachen experimentell zu reproduzieren. Daher wurde das Prinzip umformuliert: „Ähnliche Ursachen erzeugen ähnliche Wirkungen“. Dieses Kausalitätsprinzip beinhaltet das der schwachen Kausalität und wird daher als starke Kausalität bezeichnet.

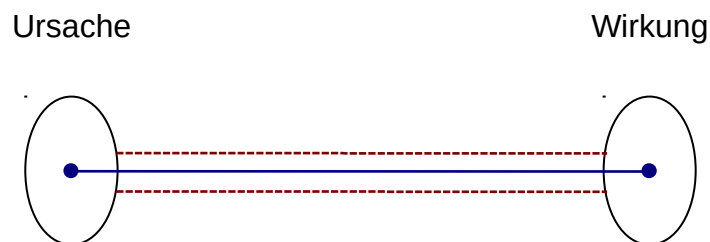


Abb.8: Schematische Darstellung von starker und schwacher Kausalität.

Die damit verbundene Vorstellung ist die der Berechenbarkeit aller im Universum ablaufenden Vorgänge. Unvorhersehbares ist demnach nur durch Mangel an Information bzw. Unzulänglichkeiten bei deren Verarbeitung möglich. Mit anderen Worten: Es gibt kein Chaos!

Im Gegensatz dazu ist in der Nichtlinearen Dynamik, deren Name auf die zur Beschreibung benutzten Gleichungssysteme weist, neben der bereits beobachteten Selbstorganisation auch Chaos möglich. Die Unbrauchbarkeit der Prinzipien der schwachen und starken Kausalität zur Beschreibung nichtlinearer Prozesse führte zur Formulierung des oben genannten Kausalitätsprinzips, dem sogenannten "Schmetterlingseffekt". Der Meteorologe Lorenz prägte diesen Namen durch seinen Ausspruch: „Der Flügelschlag eines Schmetterlings in Peking kann das Wetter an der Westküste der USA beeinflussen“.

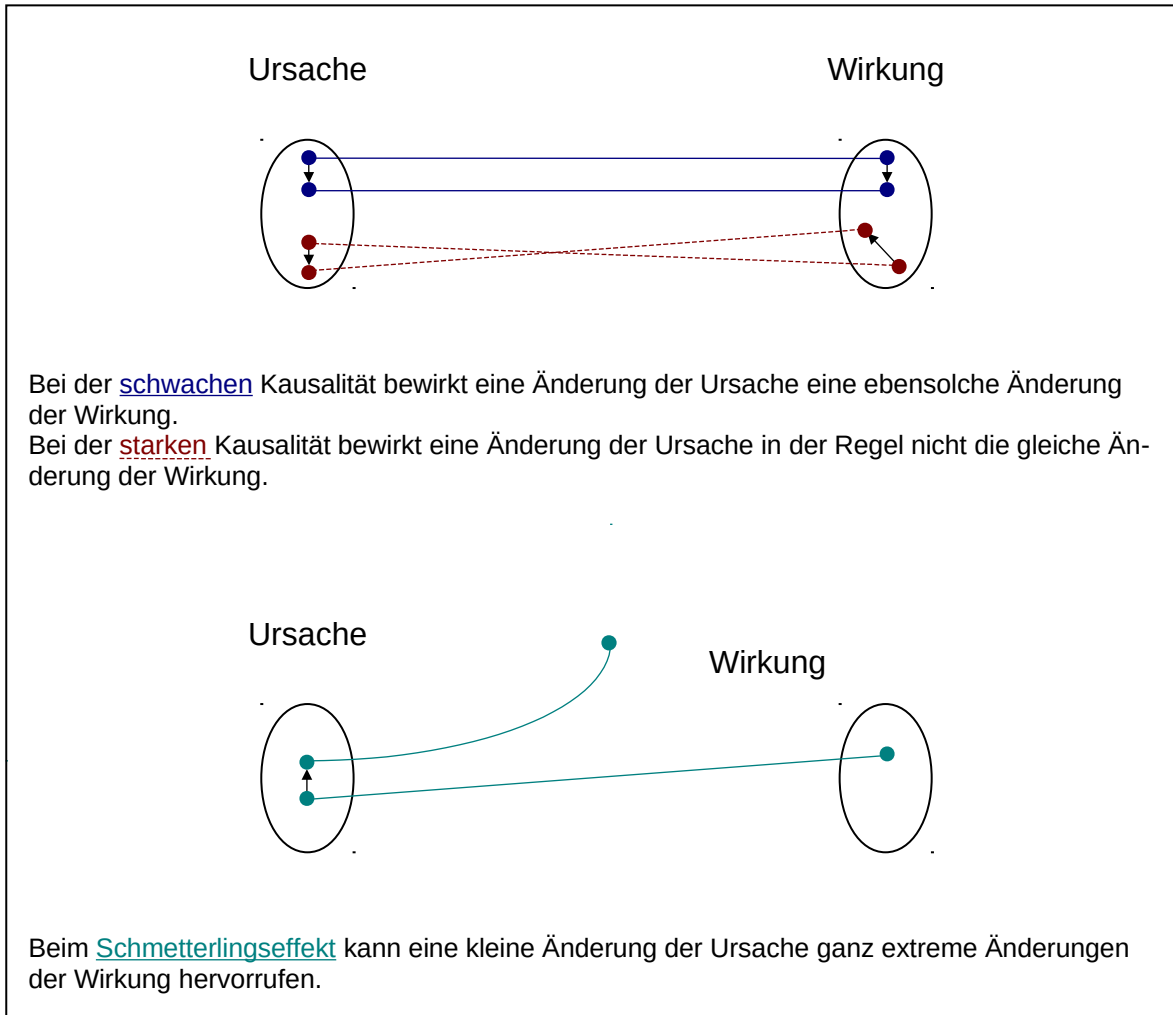


Abb.9: Kausalitätsprinzipien.

Betrachten wir den Schmetterlingseffekt als Gesetzmäßigkeit der Synergetik, so stellt sich uns die Frage, wie neben der Entstehung von Strukturen durch Selbstorganisation sich auch chaotische Zustände herausbilden können.

### 3.2 Logistische Gleichung: Selbstorganisation & Chaos

Um das Entstehen von Chaos zu verstehen, beschäftigen wir uns mit der logistischen Gleichung:

$$p_{n+1} = p_n + k p_n (1 - p_n).$$

Multipliziert man diese Gleichung aus, erhalten wir einen ähnlichen Ausdruck wie beim anharmonischen Oszillator:

$$p_{n+1} = p_n + k p_n - k p_n^2.$$

Wir betrachten die logistische Gleichung als Beschreibung der Populationsentwicklung eines Beutetieres.  $p_n$  sei hierbei die Population im 1. Jahr,  $p_{n+1}$  diejenige des darauffolgenden Jahres etc.  $k p_n$  stellt die Zuwachsrate,  $k p_n^2$  die Verlustrate dar.  $k$  ist eine Koppelungskonstante, in diesem Fall die Fortpflanzung der Beutetiere.

Gehen wir zunächst von einer geringen Population der Beutetiere aus, so bedeutet dies für die "Räuber", die sich von den Beutetieren ernähren, ein geringes Nahrungsangebot. Auf Grund dieser ungünstigen Bedingung geht der Bestand der Räuber zurück. Für die Beutetiere bewirkt das eine geringe Verlustrate, d.h. die Population wächst. Das somit verbesserte Nahrungsangebot der Räuber erhöht wiederum deren Bestand, so daß die Verluste bei den Beutetieren größer werden. Die Population wächst nun also langsamer, bis der Verlust den Zuwachs kompensiert und somit die Anzahl der Beutetiere konstant bleibt. Bei Zahlenbeispielen ist zu beachten, daß man relative Zahlen benutzen muß, d.h. man identifiziert den Stabilitätszustand mit  $100\% = 1$ .

Das Verhalten derartiger Systeme ist nun aber in hohem Maße von der Koppelungskonstanten  $k$  abhängig (Abb.10).

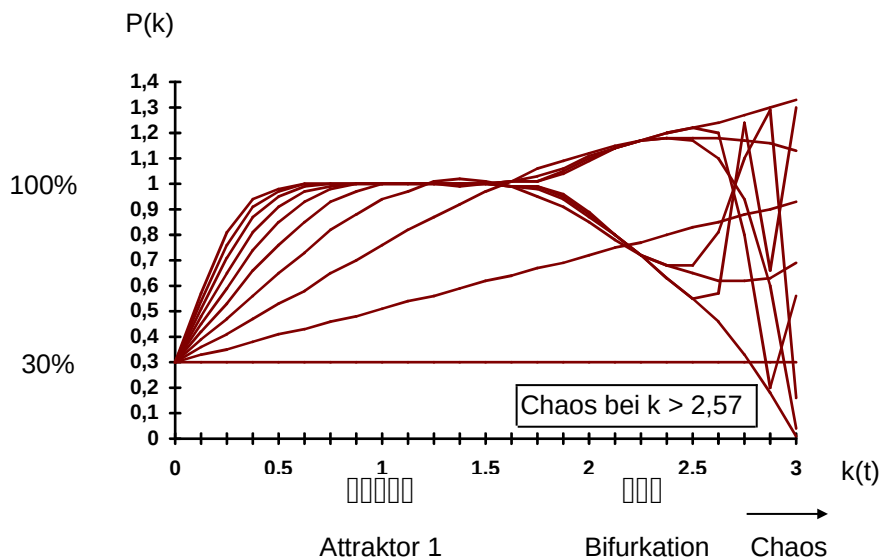


Abb.10: Verhalten des Systems in Abhängigkeit von  $k$ .

In der obigen Graphik ist die Population  $p$  gegen die Koppelungskonstante  $k$ , die in der Regel noch von der Zeit abhängt, aufgetragen. Die einzelnen Linien zeigen, um dem Rekursionscharakter Rechnung zu tragen, den Verlauf für verschiedene Anfangswerte. Die sich daraus ergebende Gesamtkurve stellt in ihrer anfänglichen Gestalt das bereits beschriebene Erreichen und Beibehalten des Stabilitätszustandes dar. Die Zustände, zu denen ein System tendiert nennt man "Attraktoren".

Bei weiterer Erhöhung von  $k$  beobachtet man dann sogenannte "Bifurkationen" (Verzweigungen), d.h. das System kann jeweils zwischen zwei gleichberechtig-

ten Zuständen wählen. Schließlich ergibt sich ab einem bestimmten Wert für  $k$  nur noch eine Punktwolke.

Nachdem also zunächst das System eindeutig durch den Stabilitätszustand bestimmt ist, wird dann durch die Bifurkationen die Vorhersagbarkeit schon eingeschränkt. Am Ende sind in der Punktwolke zwar die einzelnen Punkte eindeutig bestimmt, eine Vorhersage ist jedoch nicht mehr möglich: Es herrscht Chaos.

### 3.3 Selbstorganisation & Chaos beim Bénard-Experiment

Zum besseren Verständnis schauen wir uns die Bifurkationen und das Verhalten in diesem Bereich beim Bénard-Experiment an.

Wir hatten als Stabilitätsbedingungen für die Amplitude  $A_1$  drei Lösungen herausgefunden. Im Fall  $A_1 = 0$  hat sich der Ordnungsparameter noch nicht gebildet. Für Amplituden  $A_n$ , die nicht Ordnungsparameter sind und demnach wieder abklingen, muß zur Realisation von  $A_n = 0$  gelten

$$d/dt A_n < 0$$

Daraus folgt, daß der Wachstumsfaktor  $\alpha$  in Gleichung  $_{\star}$  negativ ist. Das System gibt also für nicht geeignete Amplituden einen negativen Wachstumsfaktor vor und nimmt auf diese Art und Weise eine Selektion vor. Für  $A_1 \neq 0$  begünstigt das System die Entwicklung mit einem positiven Wachstumsparameter und in diesem Fall gibt es zwei vollkommen gleichberechtigte Lösungen:

$$A_1 = \pm\sqrt{\alpha / \beta}$$

$$\tilde{A}_1 = \mp\sqrt{\alpha / \beta}$$

Diese beiden für das System möglichen Stabilitätszustände stellen eine Bifurkation dar (Abb.11).

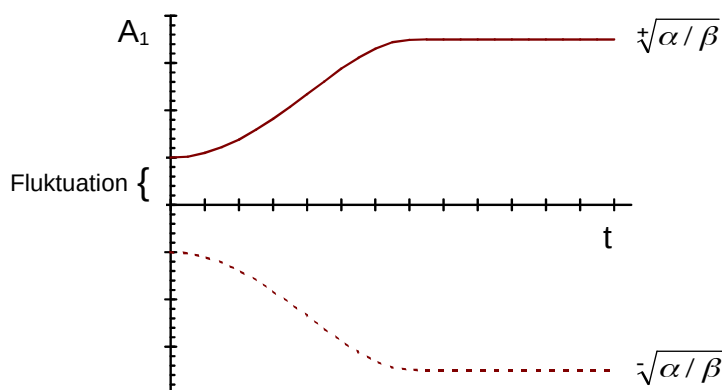


Abb.11: Bifurkation beim Bénard-Experiment.

Zur Klärung der Frage, welcher Zustand letztlich ausgebildet wird, betrachten wir das System im Potentialmuldenmodell. Für den Fall  $A_n = 0$  stellt sich dies folgendermaßen dar (Abb.12):

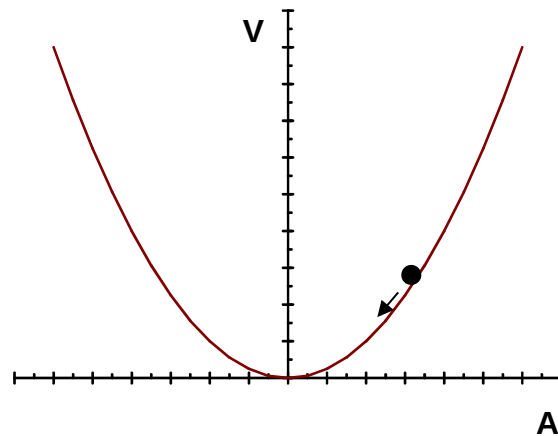


Abb.12: Potentiallandschaft für  $A_n = 0$ .

Die Amplitude ist hier auf der x-Achse, das Potential auf der y-Achse aufgetragen. Die Position der Kugel symbolisiert den Zustand des Systems. Bei einer entsprechenden Auslenkung rollt die Kugel immer wieder in die Mulde zurück, das System strebt wieder dem Ausgangszustand zu.

Im Fall  $A_1 \neq 0$  ergibt sich folgendes Potentialmuldenmodell (Abb.13):

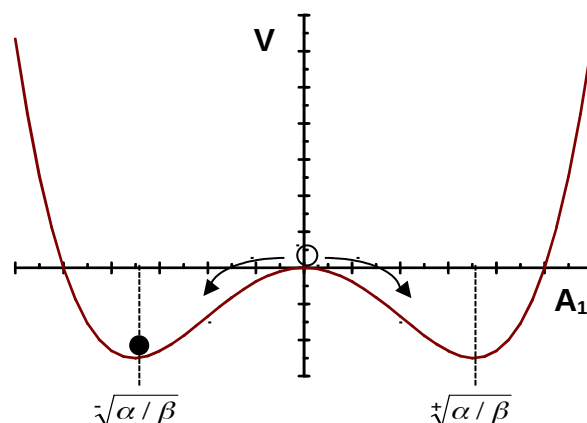


Abb.13: Potentiallandschaft für  $A_1 \neq 0$ .

Die Kugel hat nun zwei Möglichkeiten (Attraktoren) und eine beliebig kleine Auslenkung ihres Schwerpunktes aus der Mittellage zur einen oder anderen Seite bewirkt das Hinabrollen in die jeweilige Mulde. Im Experiment bedeutet dies, daß ein kleiner Vorsprung der einen Amplitude vor der anderen zur Aus-

bildung des entsprechenden Ordnungsparameters führt. Die beiden Möglichkeiten sind (Abb.14):

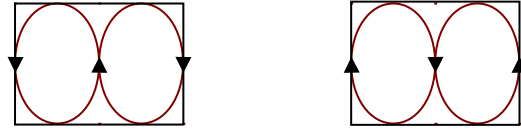


Abb.14: Zwei gleichberechtigte Möglichkeiten des Strömungsmusters.

Diese beiden Attraktoren stellen eine Bifurkation im Verhalten des Systems dar, die auf Grund des hier wirksamen Schmetterlingseffekts mit einer Einschränkung der Vorhersagbarkeit einhergeht. Mit dieser Einschränkung kommen wir dem Chaos näher und jede weitere Verzweigung, wie wir bei der logistischen Gleichung gesehen haben, geleitet uns in die Unbestimmtheit.



#### 4. Bezug zum Sport

---

Um den theoretischen Gebilden nun Leben einzuhauchen, sehen wir uns deren Wirkungsweise an zwei Beispielen an.

Zunächst das Chaos: Ein Fußballspieler, der als sicherer Elfmeterschütze gilt, wird zunächst seinem Ruf gerecht, schießt dann aber in der entscheidenden Situation doch vorbei. Bei der Klärung dessen hilft uns der Schmetterlingseffekt. Eine kleine Änderung in den Anfangsbedingungen der Bewegung kann dazu führen, daß die komplette Bewegung mißlingt. Das Ergebnis ist das Ausbleiben der erhofften Leistung.

Als Beispiel einer Strukturbildung sei hier der Trab eines Pferdes genannt. Man kann heutzutage davon ausgehen, daß solche Bewegungsmuster durch Selbstorganisation entstehen und diese als Arbeitsweise des Nervensystems betrachten. Besondere Bedeutung hat die Selbstorganisation damit natürlich für das motorische Lernen...

## Literaturverzeichnis

---

Argyris, J./Faust, W./Haase, M.: Die Erforschung des Chaos. 1994.

Buzug, T.: Analyse chaotischer Systeme. 1994.

Haken, H./Wunderlin, A.: Die Selbststrukturierung der Materie. Braunschweig 1991.

Mainzer, K.: Quanten, Chaos und Dämonen. Mannheim 1991.